Lösung 2.8 Nach Kor. 2.7 gilt

$$\dim L(n\rho)_{n\rho-\nu} = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)}\, p(\underbrace{n\rho-\nu+\rho-w((n+1)\rho)})$$

$$= (n+1)(\rho - w\rho) - \nu$$

Es ist $$w\Phi^+ = \underbrace{\Phi^+\cap w\Phi^+}_{=:\Phi_w^+} \sqcup \underbrace{(-\Phi^+)\cap w\Phi^+}_{=:\Phi_w^-}, \text{ also}$$

$$\rho - w\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_w^-}\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_w^+}\alpha - \Big(\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_w^+}\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_w^-}\alpha\Big) = -\sum_{\alpha\in\Phi_w^-}\alpha$$

$$= +\sum_{\alpha\in\Phi^+\setminus w\Phi^+}\alpha$$

Sei $\nu = \sum_{\alpha\in\Delta}\nu_\alpha\cdot\alpha$, $\nu_\alpha\in\mathbb{N}$.

Ist $w\neq 1$, so ist $\Phi^+\setminus w\Phi^+ \neq \emptyset$. Sei $\beta\in\Phi^+\setminus w\Phi^+$,

$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_\alpha\cdot\alpha$. $\exists\, \alpha\in\Delta$: $\beta_\alpha > 0$.

Für $n \geq \nu_\alpha/\beta_\alpha$ gilt

$$(n+1)(\rho - w\rho) - \nu = \underbrace{\big((n+1)\beta_\alpha - \nu_\alpha\big)}_{\in\,\mathbb{N}\setminus 0}\alpha + \sum_{\substack{\gamma\neq\alpha\\ \gamma\in\Delta}}\overbrace{\big((n+1)\beta_\gamma - \nu_\gamma\big)}^{\in\,\mathbb{Z}}\gamma$$

also folgt $p((n+1)(\rho - w\rho) - \nu) = 0$. $\Rightarrow$ Beh. $\square$

<u>Lösung 2.10</u> Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Setze

$\lambda := (k-1)\rho \in \Lambda_+$. Dann gilt

$\lambda + \rho = k\rho$ ~~und $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1 \quad \forall \alpha \in \Delta$.~~

Es folgt mit Theorem 2.9:

$$\dim L((k-1)\rho) = \frac{\prod_{\alpha>0} \langle k\rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle} = k^{\#\Phi^+}.$$

$\square$.

§ 3. Methoden für die Kategorie $\mathcal{O}$

Ext – Funktoren

Prop. 3.1 Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$

(1) Ist M HGM zum Gewicht μ, $\lambda \not< \mu$, so ist

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M(\lambda), M) = 0$$

(2) Insbesondere

$\mu \leq \lambda \Rightarrow$ $\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M(\lambda), L(\mu)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M(\lambda), M(\mu)) = 0$

(3) Sei $\mu < \lambda$. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(N(\lambda), L(\mu)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(L(\lambda), L(\mu))$$

(4) $\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(L(\lambda), L(\lambda)) = 0.$

Beweis:

(1) $\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(C, A)$ klassifiziert Erweiterungen von A durch C.

Sei $\quad 0 \to M \to E \to M(\lambda) \to 0 \quad$ keS in $\mathcal{O}$.

Gegeben sei $v \in E_\lambda$ mit $v \mapsto v_\lambda$. Dann ist nach Voraussetzung $\mathfrak{n}^+ v \cap M = 0$ und $\mathfrak{n}^+ v_\lambda = 0$ $(\Rightarrow \mathfrak{n}^+ v \subseteq M)$, also $\mathfrak{n}^+ v = 0$

Damit ist v maximal und $\exists\ \phi \neq 0 : \begin{array}{ccc} M(\lambda) & \xrightarrow{U(\mathfrak{g})\text{-hm}} & E \\ v_\lambda & \longmapsto & v \end{array}$.

ϕ spaltet die Sequenz $\Rightarrow$ Beh.

(2) Folgt aus (1).

(3) Die lange exakte $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}$ - Sequenz für

$$0 \to N(\lambda) \to M(\lambda) \to L(\lambda) \to 0$$ ist

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L(\lambda), L(\mu)) \to \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M(\lambda), L(\mu))}_{\overset{\mu<\lambda}{=} 0} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(N(\lambda), L(\mu))$$

$$\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(L(\lambda), L(\mu)) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M(\lambda), L(\mu))}_{\overset{(I)}{=} 0} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(N(\lambda), L(\mu)) \to \cdots$$

$\Rightarrow$ Beh.

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(N(\lambda), L(\lambda)) = 0$$

(4) Setze oben $\mu = \lambda$. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(N(\lambda), L(\lambda)) = 0$, da $L(\lambda)$ kein Kompositionsfaktor von $N(\lambda)$ ist. $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Übung. 3.2 Sei $N = \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

N sei $\mathfrak{b}$ - Modul via $x N :=$

$$h|_N := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Zeige, dass es eine nicht-triviale Erweiterung

$$0 \to M(\lambda) \to M := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} N \to M(\lambda) \to 0$$

gibt und schließe: $M \notin \mathcal{O}$.

Dualitätsfunktor

Def. 3.3. Sei M ein $\mathfrak{g}$-Modul.

Definiere den getwisteten Dual

$$M^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C}) \quad \text{mit } \mathfrak{g}\text{-Wirkung}$$

$$(x \cdot f)(v) := f(\tau(x)v), \quad \text{wobei}$$

$\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ die Transpositionsabbildung ist:

$\tau(h) = h \quad \forall h \in \mathfrak{h}, \quad \tau(x_\alpha) = y_\alpha, \ \tau(y_\alpha) = x_\alpha.$

(τ ist ein Antiisomorphismus, $\tau(x) = x^t$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.)

Es ist $(M^*)_\lambda \cong (M_\lambda)^*$. Definiere

$$M^\vee := \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda^* \subseteq M^*.$$

Theorem 3.4 ~~[illegible]~~

(1) Für $M \in \mathcal{O}$ ist $M^\vee \in \mathcal{O}$. $(-)^\vee$ ist ein exakter Cofunktor und eine Autoäquivalenz von $\mathcal{O}$.

(2) $\forall M \in \mathcal{O}, \chi : \ (M^\vee)^\chi \cong (M^\chi)^\vee$, insbesondere ist $\mathcal{O}_\chi$ invariant unter $(-)^\vee$.

(3) $\forall M \in \mathcal{O} : \quad \mathrm{ch}\, M = \mathrm{ch}\, M^\vee$, also $[M] = [M^\vee]$ in $K(\mathcal{O})$.

Insbesondere ~~ist~~ $L(\lambda)^\vee \cong L(\lambda)$.

(4) $(-)^\vee$ ist additiv, also M unzerlegbar $\Rightarrow$ $M^\vee$ unzerl.

(5)
$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M, N) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(N^\vee, M^\vee) \text{, insbesondere}$$
$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(L(\lambda), L(\mu)) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(L(\mu), L(\lambda))$$

<u>Beweis</u> Exaktheit von $(-)^\vee$ ist klar, ebenso $(-)^{\vee\vee} \cong \mathrm{id}$.

(1)/(3) $\cancel{x_\alpha \cdot M^\vee_\mu = (\tau(x_\alpha) M_\mu)^*}$

$\alpha \in \Phi^+$. $f \in M^\vee_\mu$, $v \in M_\nu$
$$(x_\alpha \cdot f)(v) = f(\underbrace{\tau(x_\alpha)}_{y_\alpha} v) \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad \nu - \alpha = \mu \Leftrightarrow \nu = \alpha + \mu$$

$$\Rightarrow \quad x_\alpha \cdot M^\vee_\mu \subseteq M^\vee_{\mu+\alpha} \quad \Rightarrow \mathfrak{n}^+ \text{ lokal nilpotent auf } M^\vee$$

$\mathrm{ch}\, M^\vee = \mathrm{ch}\, M$ ist klar.

$L(\lambda)^\vee$ ist einfach und $\mathrm{ch}\, L(\lambda)^\vee = \mathrm{ch}\, L(\lambda) = e_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \ldots$

$\Rightarrow$ λ höchstes Gewicht von $L(\lambda)^\vee$ $\Rightarrow$ $L(\lambda)^\vee$ HGM und $L(\lambda)^\vee \cong L(\lambda)$.

M hat Kompositionsfaktoren $L(\lambda)$ $\xRightarrow{(-)^\vee \text{ exakt}}$ $M^\vee$ hat endl. Länge mit Kompositionsfaktoren $L(\lambda)^\vee = L(\lambda)$

$\Rightarrow$ $M^\vee$ ist endl. erzeugt. $\Rightarrow M^\vee \in \mathcal{O}$.

(5) folgt aus Exaktheit

Die anderen Beh. sind klar. $\square$.

Theorem 3.5 $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

(1) $L(\lambda)$ ist der einzige einfache Untermodul von $M(\lambda)^\vee$.
Für die weiteren Kompositionsfaktoren $L(\mu)$ gilt $\mu < \lambda$.

(2) Ist $(\phi : M(\mu) \to M(\lambda)^\vee) \neq 0$ und $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-linear, so ist $\operatorname{im} \phi = L(\lambda)$, also

$$\dim \operatorname{Hom}(M(\mu), M(\lambda)^\vee) = \delta_{\mu\lambda}.$$

(3) $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M(\mu), M(\lambda)^\vee) = 0 \quad \forall \lambda, \mu.$

Beweis

(1) $L(\lambda)$ ist der einzige einfache Quotient von $M(\lambda)$, also folgt der 1. Teil aus $(-)^{\vee\vee} \cong id$.

Ferner $\sum_\mu [M(\lambda)^\vee : L(\mu)] \operatorname{ch} L(\mu) = \operatorname{ch} M(\lambda)^\vee = \operatorname{ch} M(\lambda)$

$$= \sum_\mu [M(\lambda) : L(\mu)] \operatorname{ch} L(\mu)$$

$\Rightarrow$ Beh$_{(1)}$.

(2) $\operatorname{im} \phi$ ist HGM zum Gewicht μ, also hat $M(\lambda)^\vee$ einen Kompositionsfaktor $L(\mu)$.
Nach (1) folgt $\mu \leq \lambda$. Diese Argumentation, angewandt auf $\phi^\vee : M(\lambda) \to M(\mu)^\vee$, liefert $\mu \geq \lambda$, also $\mu = \lambda$. Da $\dim M(\lambda)^\vee_\lambda = 1$, ist $\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M(\lambda), M(\lambda)^\vee) \leq 1$.

Schließlich kann man für $\lambda = \mu$ ϕ wie folgt definieren:

$$\begin{tikzcd} M(\lambda) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\neq 0"'] & L(\lambda) \arrow[r, hook, "(1)"'] & M(\lambda)^\vee \\[-2em] v_\lambda \arrow[r, mapsto] & v_\lambda \arrow[r, mapsto] & \cancel{v_\lambda^?} \end{tikzcd}$$

(3) Die Gewichte von $M \in \mathcal{O}$, gegeben eine kES

$$0 \to M(\lambda)^\vee \to M \to M(\mu) \to 0,$$

sind $\leq \mu$ oder $\leq \lambda$. Ist μ ein maximales Gewicht von M, so spaltet die Sequenz (Argument wie im Beweis von Prop. 3.1 (1)).

Ist μ nicht maximal, so $\exists\, \nu \in \Pi(M)$: $\mu < \nu$. Dann ist $\nu \nleq \mu$ und folglich $\leq \lambda$, also $\mu < \lambda$.

Für $\mu < \lambda$ hört man, dass die duale kES

$$0 \to M(\mu)^\vee \to M^\vee \to M(\lambda) \to 0$$

spaltet, da λ maximales Gewicht von $M^\vee$ ist.

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Bem. 2.6. Ist $L(\mu)$ ein Kompositionsfaktor von $M(\lambda)$, so gilt

(1) $\mu \leq \lambda$ (2) $\exists w \in W: \mu = w \cdot \lambda$.

Die erste Bedingung impliziert $\mu \equiv \lambda \; (\Lambda_r)$, aber falls $\lambda \notin \Lambda_r$, ist $w \circ \lambda - \lambda$ im allgemeinen $\notin \Lambda_r$.
$(\equiv w\lambda - \lambda \; (\Lambda_r))$

Dies motiviert die folgende Definition:

Def. 2.7 (Jantzen) Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Definiere

$$\Phi_{[\lambda]} := \{\alpha \in \Phi \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$$
$$W_{[\lambda]} := \{w \in W \mid w\lambda - \lambda \in \Lambda_r\} = \{w \in W \mid w \circ \lambda - \lambda \in \Lambda_r\}.$$

Theorem 2.8 Sei $E := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$ und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Dann gilt:

(1) $\Phi_{[\lambda]}$ ist ein Wurzelsystem in $E(\lambda) := \langle \Phi_{[\lambda]} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq E$.

(2) $W_{[\lambda]}$ ist die Weylgruppe von $\Phi_{[\lambda]}$. Insbesondere ist $W_{[\lambda]}$ von den Spiegelungen s_α, $\alpha \in \Phi_{[\lambda]}$, erzeugt.

—

0.6. Abstrakte Wurzelsysteme.

Sei E ein euklidischer $\mathbb{R}$-VR. $R \subseteq E \setminus 0$ heißt Wurzelsystem, falls gilt

(1) R ist endlich und $V = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$

(2) $\forall \alpha, \beta \in R \; : \; 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$

(3) $\forall \alpha, \beta \in R \; :$ $s_\alpha(\beta) := \beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \in R$

$W(R) := \langle s_\alpha \mid \alpha \in R \rangle \leq O(E)$ heißt ~~die~~ <u>Weylgruppe</u> von R. Man definiert pos. / einfache System wie für L.A.

<u>Fakt</u>: Ist $R' \subseteq R$ ein Wurzelsystem in $\langle R' \rangle_{\mathbb{R}}$, so $\exists$ einfaches System Δ von R, s.d. $\Delta \cap R'$ ein einfaches System von R' ist.

<u>0.6.</u> Affine Weylgrupp Sei R ein Wurzelsystem in E.

Man definiert $W_{aff} := W \ltimes \langle R \rangle_{\mathbb{Z}}$.

W_{aff} wird erzeugt von $s_{\alpha, n}$, $\alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}$,

$$s_{\alpha,n}(\beta) := s_\alpha(\beta) + n\alpha$$

<u>Fakten</u> (1) Für $\lambda \in E$ ist

$$\mathrm{Fix}_W(\lambda) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi, \langle \alpha, \lambda \rangle = 0 \rangle$$

(2) Für $\lambda \in E$ ist

$$\mathrm{Fix}_{W_{aff}}(\lambda) = \langle s_{\alpha,n} \mid \alpha \in \Phi, n \in \mathbb{Z}, \overbrace{s_{\alpha,n}(\lambda) = \lambda}^{\Leftrightarrow \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = n} \rangle .$$

Beweis von Theorem 2.8:

(1) Reicht zu zeigen: $\Phi_{[\lambda]}$ ist invariant unter s_α, $\alpha \in \Phi_{[\lambda]}$.

Seien $\alpha, \beta \in \Phi_{[\lambda]}$. Es gilt

$$\langle \lambda, (s_\alpha(\beta))^\vee \rangle = \frac{\langle \lambda, s_\alpha(\beta) \rangle}{\underbrace{\langle s_\alpha(\beta), s_\alpha(\beta) \rangle}_{=\langle \beta, \beta \rangle}} = \langle \lambda, s_\alpha(\beta^\vee) \rangle$$

$$= \langle \lambda - \underbrace{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}_{\in \mathbb{Z}} \alpha, \beta^\vee \rangle = \underbrace{\langle \lambda, \beta^\vee \rangle - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \beta^\vee \rangle}_{\in \mathbb{Z}}$$

$\Rightarrow \quad s_\alpha(\beta) \in \Phi_{[\lambda]}$.

Man nehme zunächst an:

(2) ~~Sei~~ $\lambda \in E(\lambda)$. Sei $\alpha \in \Phi_{[\lambda]}$. Dann gilt

$$s_\alpha(\lambda) - \lambda = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \Lambda_r \Leftrightarrow \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad s_{\alpha, -n}(\lambda) = s_\alpha(\lambda) - n\alpha = \lambda$$

Daher $\mathrm{Fix}_{W_{aff}}(\lambda) \to W_{[\lambda]}$ und $W_{[\lambda]}$ ist erzeugt von s_α, $\alpha \in \Phi_{[\lambda]}$

Im allgemeinen Fall, beachte, dass

$$\mathfrak{h}^* = E \oplus iE \quad , \ E := \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} \ .$$ Schreibe

$\lambda = x + iy$, $\quad x, y \in E$. $\quad$ Es gilt $x \in E(\lambda)$

und $\qquad w \in W_{[\lambda]} \iff w \in W_{[x]}, \ wy = y$,

d.h. $\qquad W_{[\lambda]} = W_{[x]} \cap W_1 \quad , \ W_1 = \mathrm{Fix}_W(y)$.

W_1 ist die Weylgruppe von $\Phi_1 = \{\alpha \mid \langle y, \alpha \rangle = 0\}$.

Da $\quad \langle \Phi_1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \Lambda_r \cap E_1$, $\quad E_1 = y^\perp$, ist

$W_{[\lambda]} = \{ w \in W_1 \mid w\lambda - \lambda \in \langle \Phi_1 \rangle_{\mathbb{Z}} \}$. Mit dem 1. Teil

folgt die Beh.

$\square$